Deuxième partie:
Cinématique du point matériel

Cinématique: description du mouvement indépendamment de ses causes

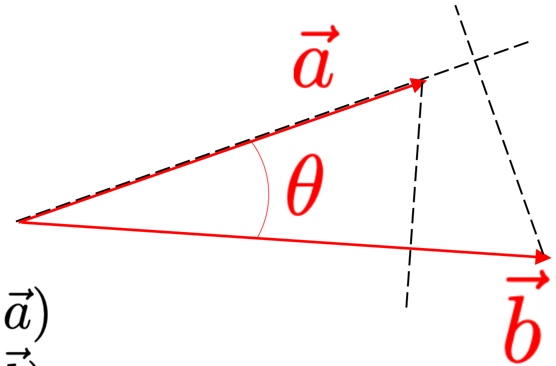
Notions abordées :

- 2.1 rappels d'analyse vectorielle
- 2.2 cinématique: trajectoire, vitesse, accélération normale et tangentielle, mouvement circulaire uniforme
- 2.3 Base en rotation
- 2.4 vitesse et accélération en coordonnées cylindriques
- 2.5 vitesse et accélération en coordonnées sphériques
- 2.6 contraintes et forces de liaison

Buts:

- décrire un mouvement
- apprendre à travailler avec différents systèmes de coordonnées
- savoir écrire les équations du mouvement d'un point matériel

2.1 Produit scalaire

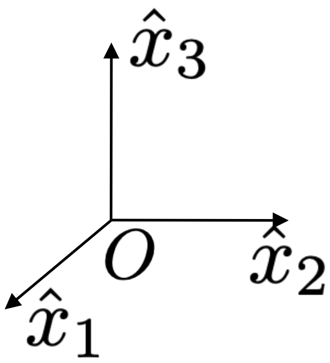


- Définition d'un produit « scalaire » (i.e. un nombre):

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \\ &= (\text{norme de } \vec{a}) * (\text{norme de la projection de } \vec{b} \text{ sur } \vec{a}) \\ &= (\text{norme de } \vec{b}) * (\text{norme de la projection de } \vec{a} \text{ sur } \vec{b})\end{aligned}$$

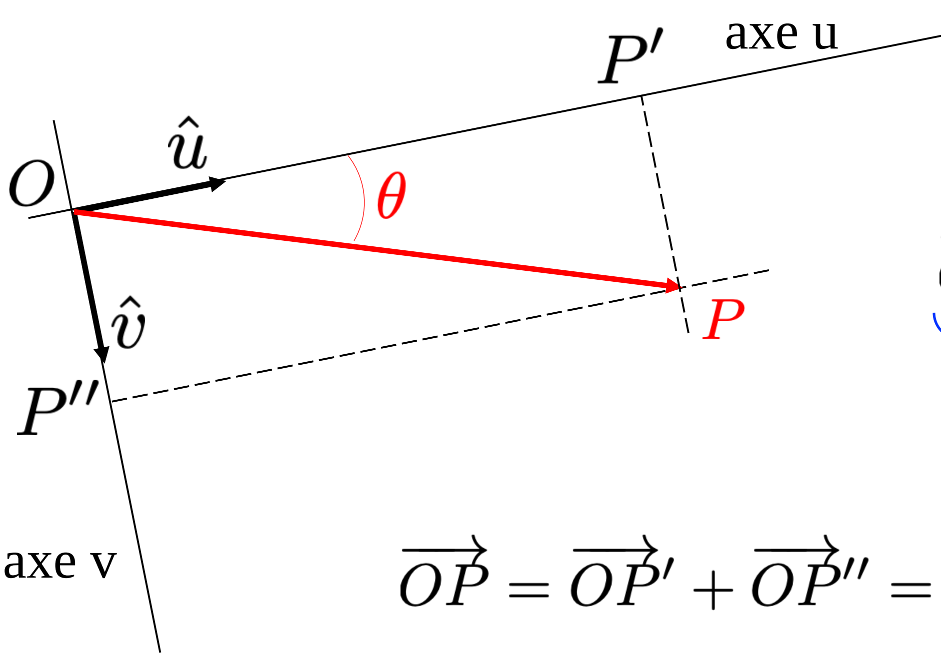
- En composantes (dans un repère orthonormé):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_3)\cdot(b_1\hat{x}_1 + b_2\hat{x}_2 + b_3\hat{x}_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$



- Propriétés:
  - Commutativité: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
  - Distributivité: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
  - Linéarité: $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$
  - Vecteurs orthogonaux: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$
  - (Norme)^2 d'un vecteur: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$
  - Norme d'un vecteur $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

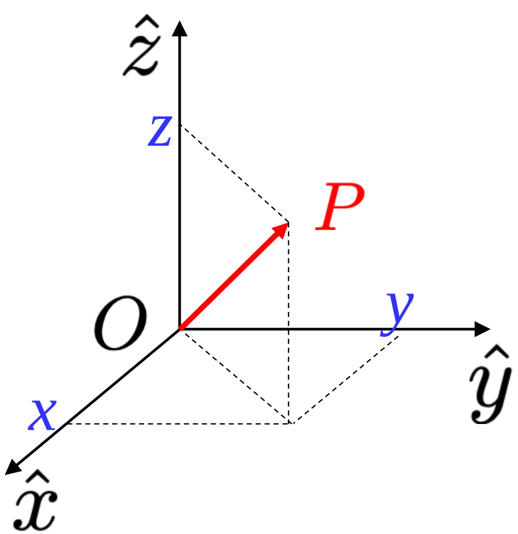
2.1 Projections et composantes d'un vecteur



Projection du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur l'axe $\hat{u}$:

$$\underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot \hat{u} = |\overrightarrow{OP}|\,|\hat{u}| \cos\theta}_{\text{produit scalaire}} = OP\ \cos\theta = OP'$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''} = OP'\,\hat{u} + OP''\,\hat{v} = (\overrightarrow{OP} \cdot \hat{u})\hat{u} + (\overrightarrow{OP} \cdot \hat{v})\hat{v}$$



Coordonnées cartésiennes du point P ou composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$:

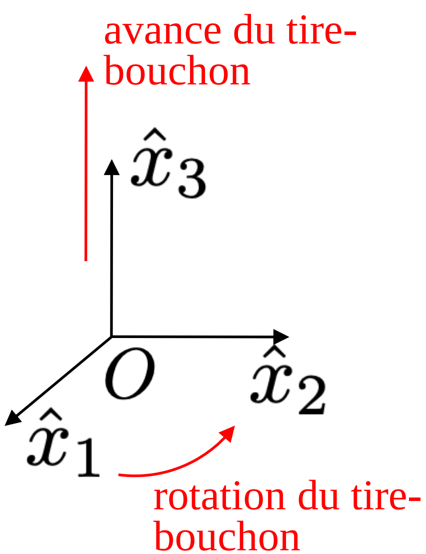
$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{x} \\ y = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{y} \\ z = \overrightarrow{OP} \cdot \hat{z} \end{cases}$$

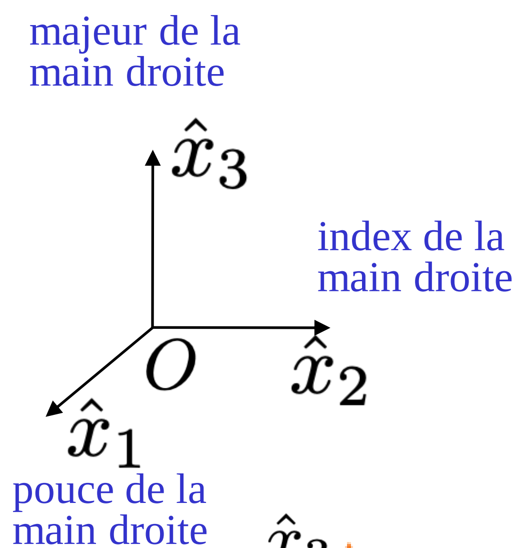
$$\overrightarrow{OP} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.1 Repère direct (ou repère droit)

- Par convention, on n’utilise que des repères dont la chiralité est définie (arbitrairement) par la **« règle du tire-bouchon »** ou la **« règle de la main droite »**

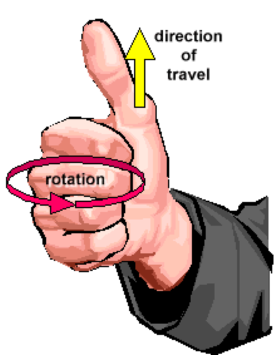
Repère directe ou droit:
deux definitions equivalentes

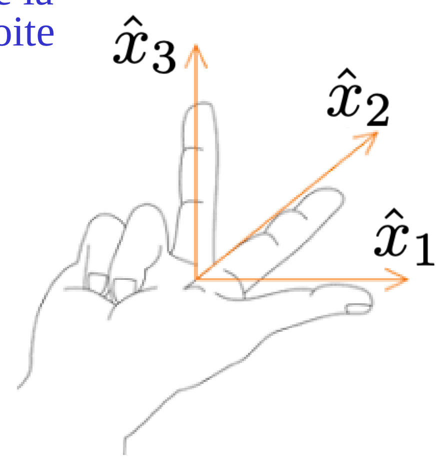




Un mouvement de rotation qui amène l’axe 1 sur l’axe 2 ferait avancer un tire-bouchon dans la direction de l’axe 3:

L’avance d’un tire-bouchon droit est donné par la direction du pouce de la main droite quand la rotation est donnée par les doigts qui se referment.





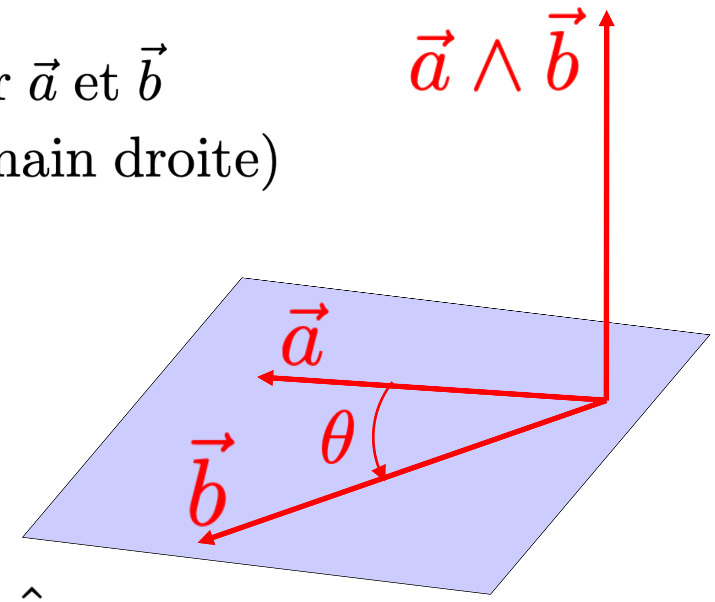
Main droite:
Le pouce orienté selon l’axe 1
L’index orienté selon l’axe 2
Le majeur orienté selon l’axe 3

→ démo tire-bouchon

2.1 Produit vectoriel

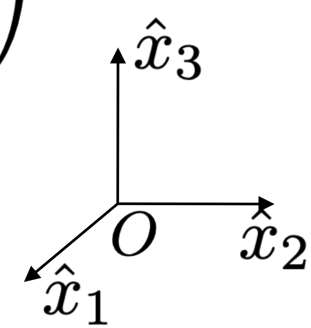
- Définition d'un produit « vectoriel » (i.e. un vecteur):

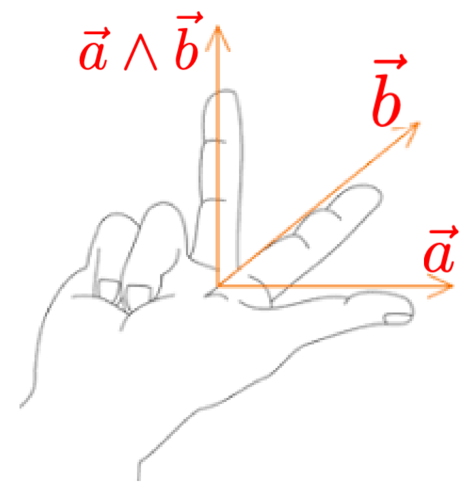
$$\begin{aligned}
\text{direction de } \vec{a}\wedge\vec{b} &= \text{normale au plan défini par } \vec{a} \text{ et } \vec{b}\\
\text{sens de } \vec{a}\wedge\vec{b} &= \text{conventionel (règle de la main droite)}\\
\text{norme de } \vec{a}\wedge\vec{b} &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta
\end{aligned}$$



- En composantes:

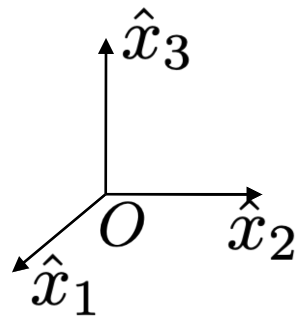
$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{x}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{x}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{x}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{déterminant}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}}_{\text{composantes}}$$





- Propriétés:
  - Anti-commutativité: $\vec{a}\wedge\vec{b} = -\vec{b}\wedge\vec{a}$
  - Distributivité: $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$
  - Linéarité: $\vec{a}\wedge(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})$
  - Vecteurs parallèles: $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{0}$

Quiz



$\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_3 =$

?

$\hat{x}_2$ $\quad -\hat{x}_2$

$\hat{x}_3 \wedge \hat{x}_2$?

?

$\hat{x}_1$ $\quad -\hat{x}_1$

2.1 Autres propriétés utiles

- Produit mixte (= un scalaire):

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a},\ \vec{b} \text{ et } \vec{c} \;\; \text{coplanaires (dans le même plan)}$$

- Double produit vectoriel (= un vecteur):

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

perpendiculaire à $\vec{a}$ et dans le plan de $\vec{b}$ et $\vec{c}$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$$

- Distributivité de la dérivation:

$$\frac{d}{dx}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dx} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dx}\right)$$

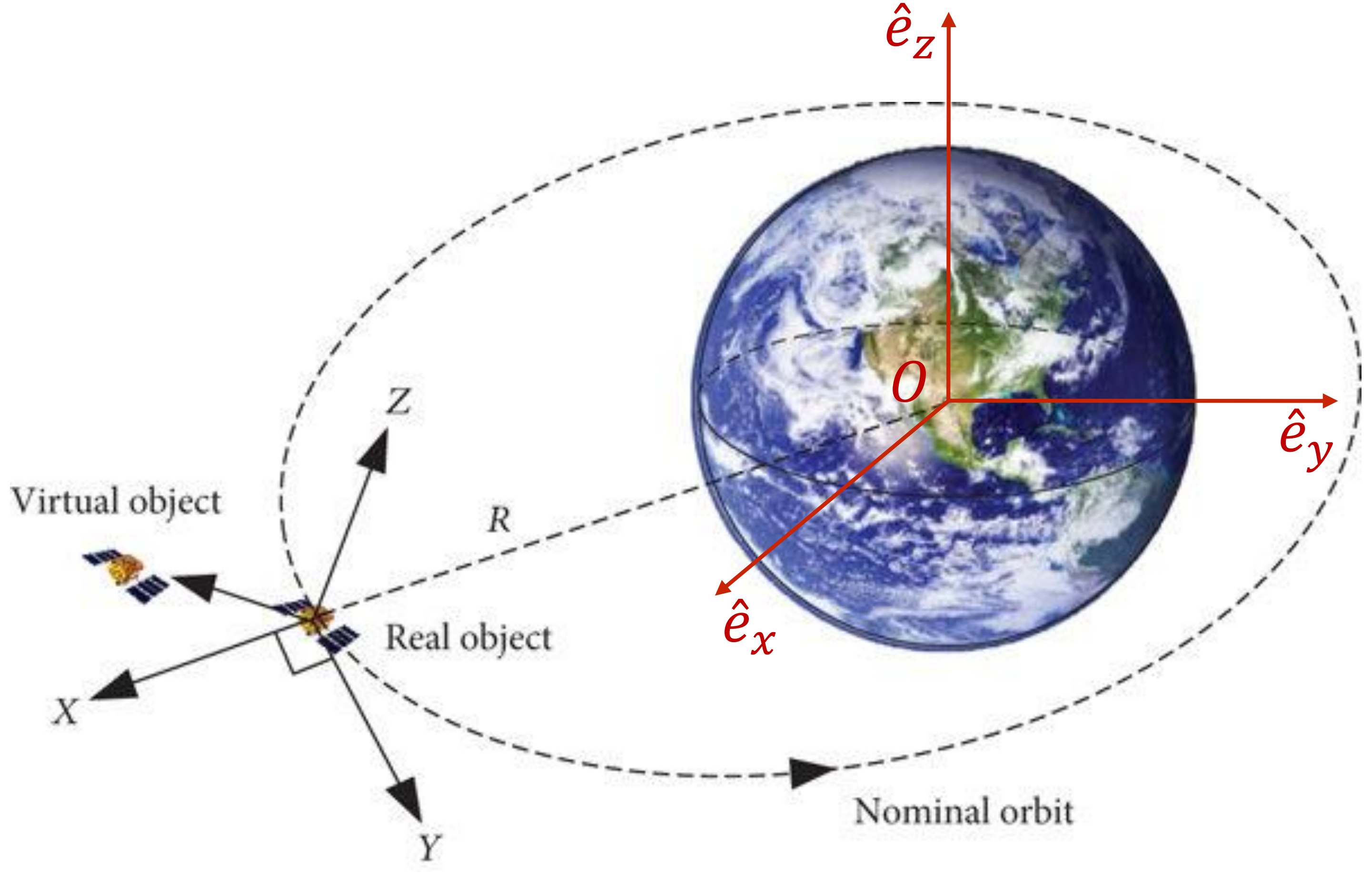
$$\frac{d}{dx}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dx} \wedge \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dx}\right)$$

2.2 Cinématique du point matériel

La cinématique a pour objet la description du mouvement (trajectoire) d'un point matériel M

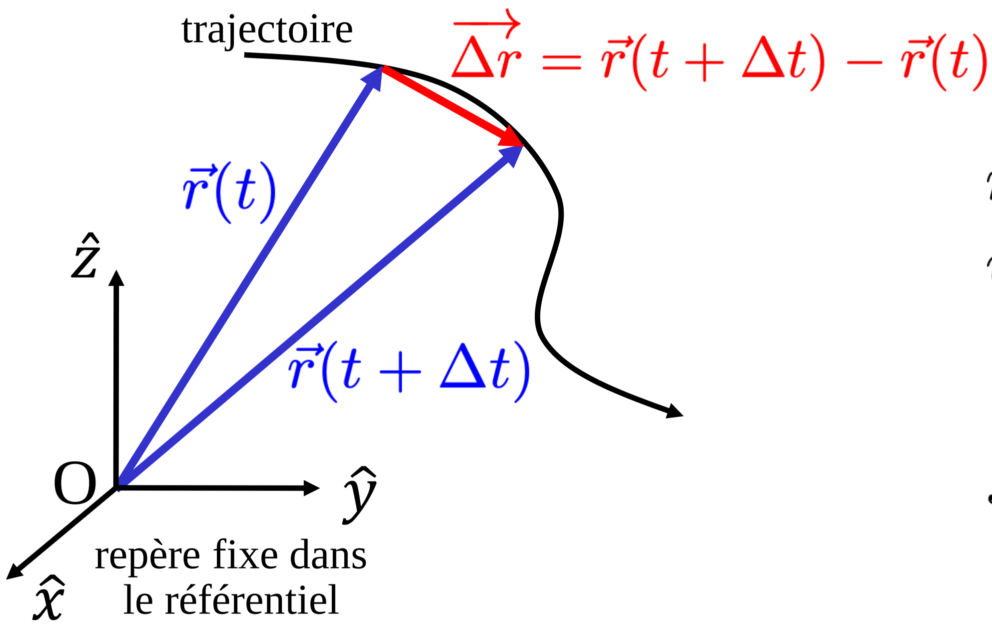
Trajectoire: La courbe décrite par la position *M(t)* au cours du temps *t*

Ex. de trajectoire: mouvement d'un satellite autour de la Terre

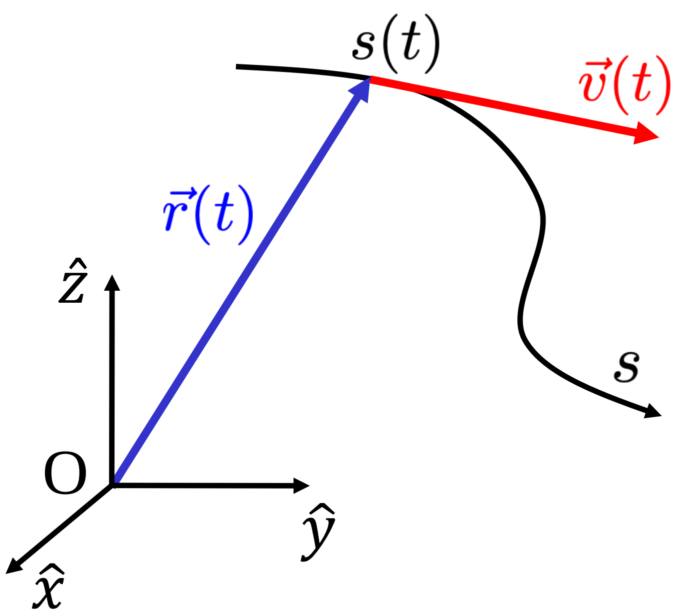


https://doi.org/10.1155/2019/5316396

2.2 Cinématique du point matériel: vitesse



$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \text{position par rapport à } O \\
\vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= \text{vitesse vectorielle instantanée} \\
&\quad\ \text{(tangente à la trajectoire)} \\
s(t) &= \text{abscisse curviligne} \\
&= \text{distance parcourue} \\
&\quad\ \text{le long de la trajectoire} \\
v(t) &= \frac{ds}{dt} = \text{vitesse scalaire} = |\vec{v}(t)|
\end{aligned}
$$



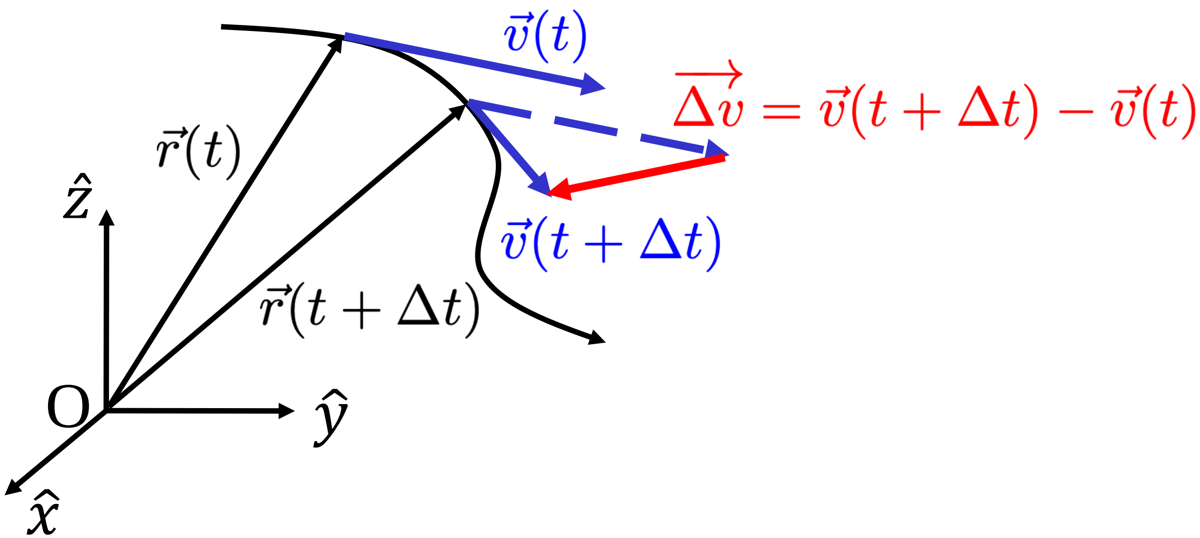
Formulation générale de $\vec{v}(t)$

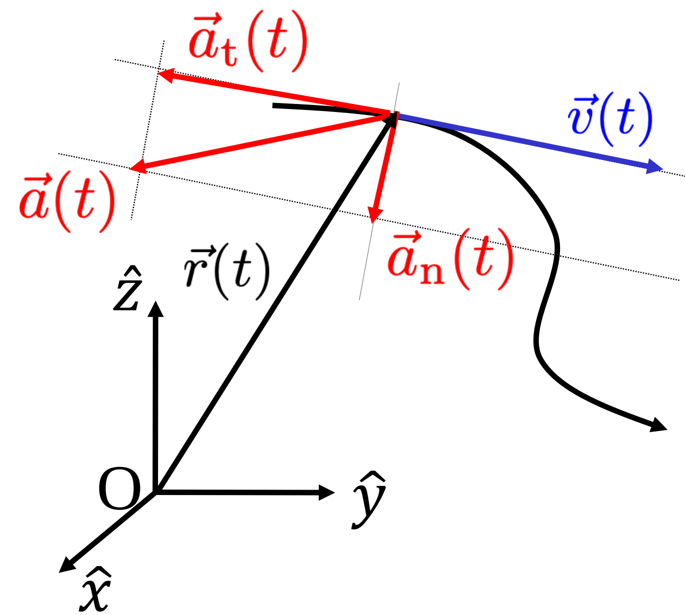
Avec $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(s(t))$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{r}}{ds} = v\hat{\tau}$$

$$\hat{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \text{vecteur unitaire tangent à la trajectoire}$$

2.2 Cinématique du point matériel: accélération





$$\begin{aligned}\vec{a}(t) \quad &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t)\\ &= \text{accélération vectorielle instantanée}\\ &= \frac{d}{dt}\underbrace{(v\hat{\tau})}_{\vec{v}(t)} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{\tau}}_{\vec{a}_\mathrm{t}(t)} + \underbrace{v\frac{d\hat{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_\mathrm{n}(t)}\end{aligned}$$

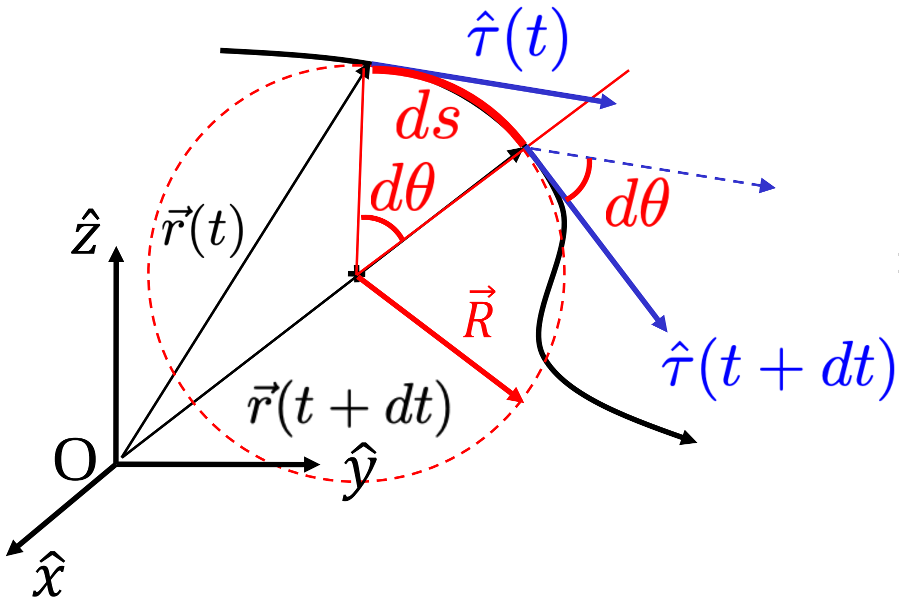
$$\begin{aligned}\vec{a}_\mathrm{t}(t) \quad &= \text{accélération tangentielle (colinéaire à } \vec{v})\\ \vec{a}_\mathrm{n}(t) \quad &= \text{accélération normale (perpendiculaire à } \vec{v}(t),\ \text{car } \hat{\tau}\cdot\frac{d\hat{\tau}}{dt} = 0)\end{aligned}$$

$\hat{\tau}^2 = 1 \rightarrow \frac{d\hat{\tau}^2}{dt} = 2\hat{\tau}\cdot\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\,1}{dt} = 0$

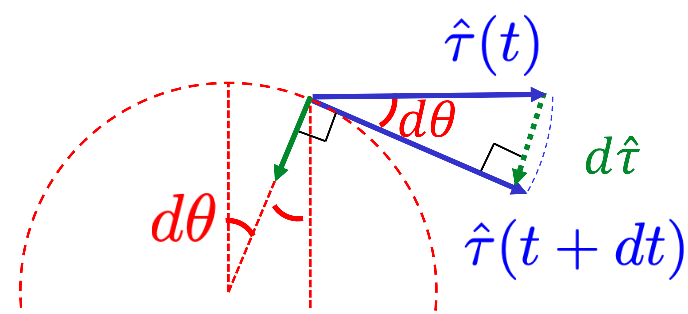
$\rightarrow \frac{d\hat{\tau}}{dt} \perp \hat{\tau}$

2.2 Accélération normale

Approximation de la trajectoire entre les instants t et $t + dt$
par un arc de cercle de rayon $R(t)$ et de longueur $ds = R(t)d\theta$



$\Rightarrow$



$$d\hat{\tau} = \hat{\tau}(t+dt) - \hat{\tau}(t)$$

$$|d\hat{\tau}| \approx |\hat{\tau}|\, d\theta = d\theta \qquad \hat{\tau}^2 = 1$$

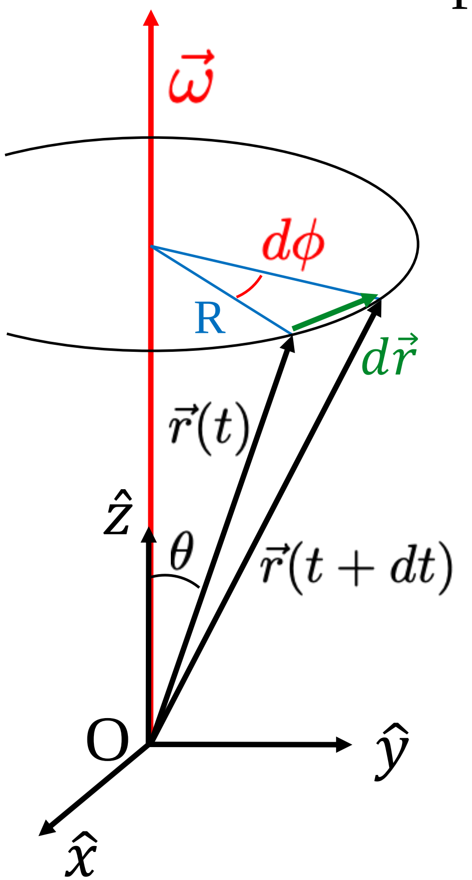
$$\begin{aligned}
\vec{a}_{\mathrm{n}}(t) &= v(t)\frac{d\hat{\tau}}{dt} = v(t)\frac{d\hat{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v(t)^2\frac{d\hat{\tau}}{ds} \\
&= \text{accélération normale dirigée vers le centre de courbure} \\
a_{\mathrm{n}}(t) &= |\vec{a}_{\mathrm{n}}(t)| = v(t)^2\left|\frac{d\hat{\tau}}{ds}\right| = v(t)^2\frac{d\theta}{R(t)d\theta} = \frac{v(t)^2}{R(t)} \\
&= \text{norme de l'accélération normale}
\end{aligned} \qquad ds = Rd\theta$$

$\vec{a}_n(t) \perp \vec{v}(\mathrm{t})$ et orienté vers le centre de rotation instantané

Alternativement, si on choisi un repère avec O au centre de rotation ($\vec{r} = \vec{R}$), on trouve que
$\vec{r}\cdot\vec{\tau} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{r}}\cdot\vec{\tau} + \vec{r}\cdot\dot{\vec{\tau}} = v(t) + \vec{r}\cdot\dot{\vec{\tau}} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{r}\cdot\dot{\vec{\tau}} = -v(t) < 0 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{\tau}} = \frac{d\hat{\tau}}{dt}$ et $\vec{r}$ sont opposés

2.2 Mouvement circulaire

Point matériel en mouvement le long d'une circonférence

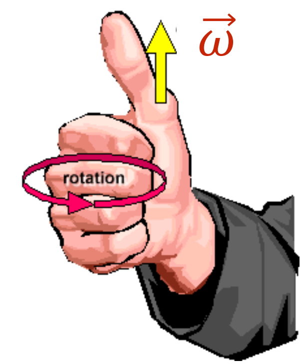


$$|d\vec{r}| = \mathrm{R}\tan(d\phi) = |\vec{r}|\sin\theta \; d\phi$$

$$|\vec{v}_t| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = |\vec{r}| \; \sin\theta \; \frac{d\phi}{dt} = |\vec{r}| \; |\vec{\omega}| \sin\theta$$

$\vec{\omega}$ (ou vitesse angulaire) est un vecteur avec:

- norme $|\vec{\omega}| = \frac{d\phi}{dt}$
- direction définie par la règle de la main droite

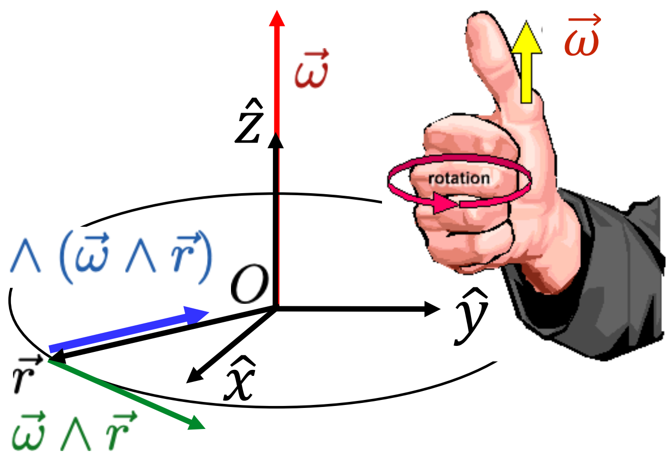


$$\boxed{\vec{v}_\mathrm{t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$$

Vitesse tangentielle

relation valide pout tous les vecteurs inclus les vecteurs unitaires d'un repère $\Rightarrow$ $\dot{\vec{e}}_i = \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i$ Formule de Poisson

2.2 Mouvement circulaire uniforme



$$v = \omega r$$
$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

Point matériel en mouvement le long d'une circonférence avec vitesse angulaire constante

$\vec{\omega}$ = constante

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_t = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}}$$

Accélération centripète (dirigée vers le centre)

N.B.: il n'y a pas d'accélération tangentielle
$\vec{a}_t = 0$

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\,\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -m\,\omega^2 \vec{r}}$$

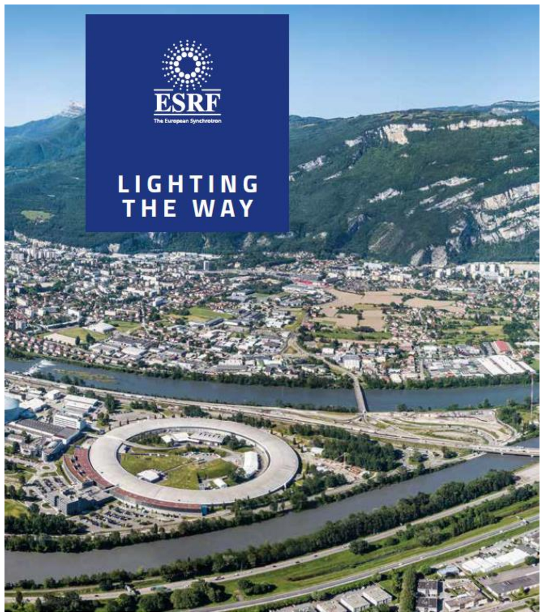
Force centripète

→ démos: accélération centripète exercée dans un mouvement circulaire uniforme

2.2 Ex.: Mouvement circulaire

Synchrotron: accélérateur à haute énergie d'un faisceau d'électron

ESRF: European Synchrotron Radiation Facility

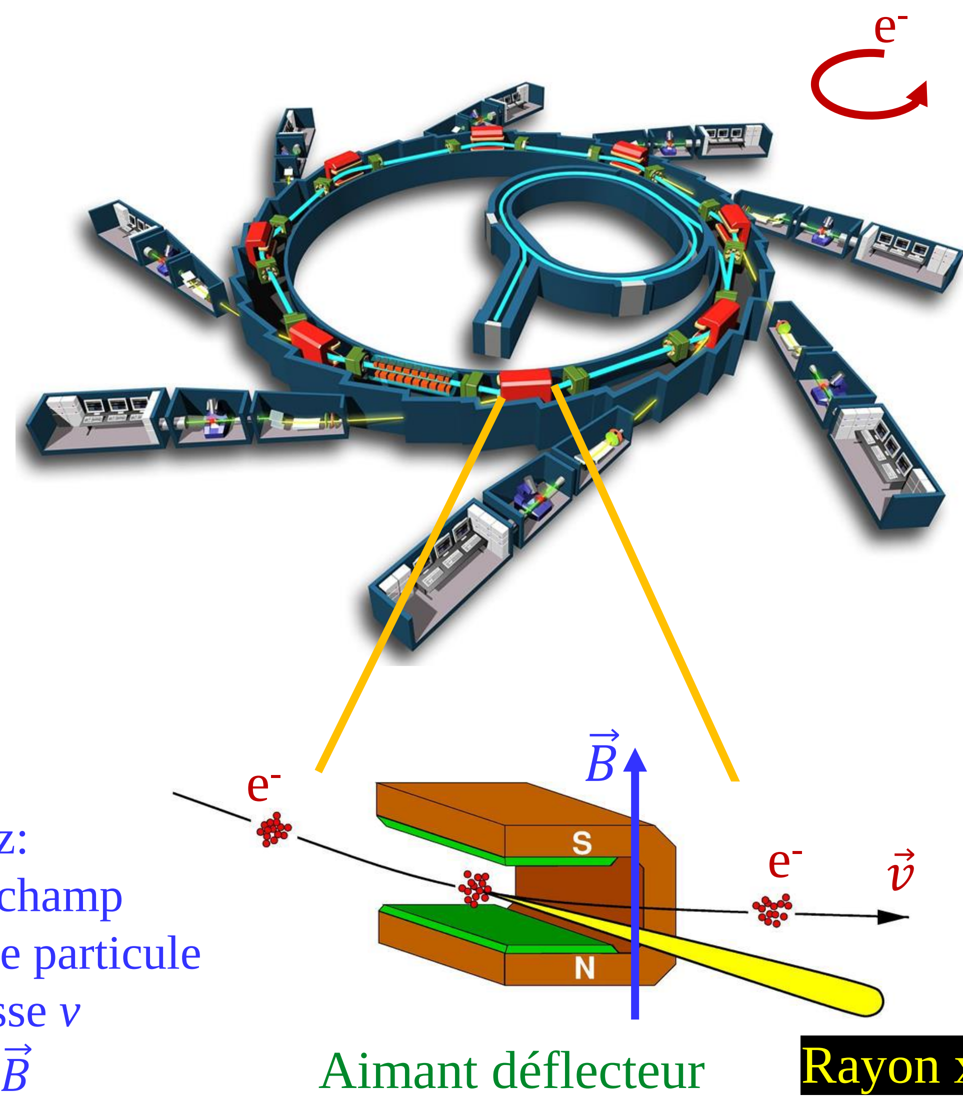


SLS: Swiss Light Source

Force de Lorentz:
force exercée par un champ
électromagnétique sur une particule
de charge q et vitesse v

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Pour un electron q = $-e$

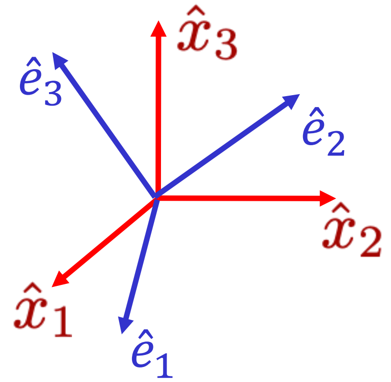


2.3 Base en rotation

- Une rotation spatiale est caractérisée par un **axe de rotation** (dans l'espace), un **sens de rotation** et un **angle de rotation**

- La description d'un système peut être faite sillon deux points de vue:
  - Système physique en rotation dans un repère fixe
    - Mouvement circulaire d'un point matériel (satellite par rapport au Pole Nord)
    - Mouvement de rotation d'un solide sur lui-même (toupie, Terre, …)
  - Système physique fixe dans une Base en rotation
    - Base $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ solidaire avec un satellite

Théorème d'Euler:
Soit deux bases orthonormés droits de même origine :
il existe toujours une rotation qui amène la première sur la deuxième



Choix de la base en rotation:

$\hat{e}_1 = \hat{\tau}$ tangent à la trajectoire

$\hat{e}_2$ perpendiculaire à la trajectoire

$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$ sillon la réglé de la main droite

→ démo repères orthonormés

2.3 Système de coordonnées

- **Définition**: **paramétrisation, à un certain temps** t**, de la position des points du référentiel au moyen de trois nombres réels.**

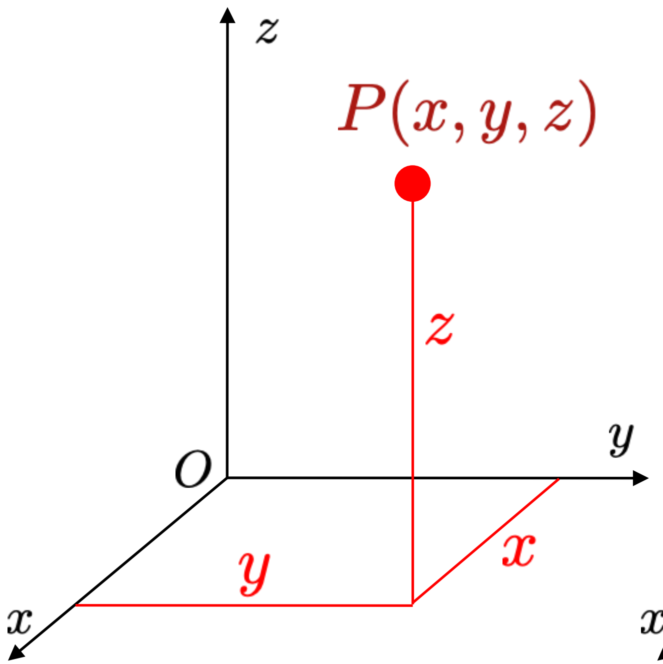
    - Pour un référentiel donné il existe une infinité de systèmes de coordonnées (ou bases)

    - Exemples:
        - Coordonnées cartésiennes (x, y, z)
        - Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)
        - Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

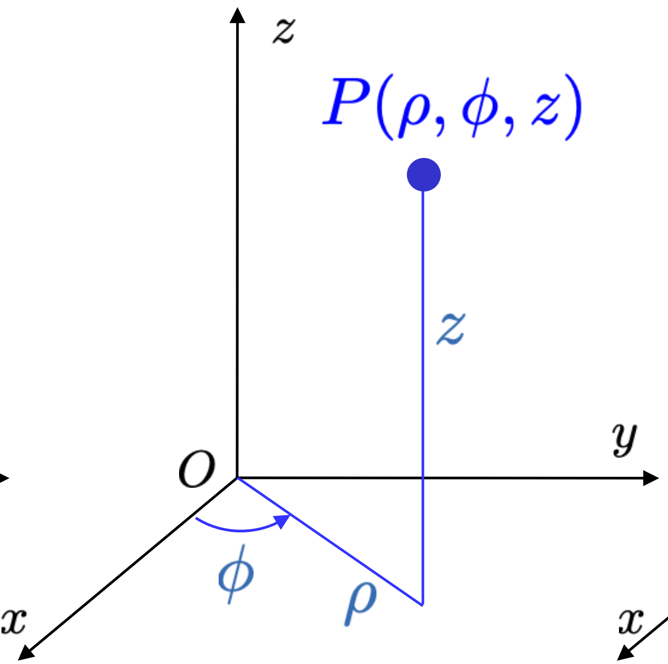
- Chaque vecteur de la base est parallèle à la variation de la position due à une modification de la variable correspondante
    - variable $u \rightarrow$ vecteur unitaire dans la direction $\hat{u}$

2.3 Différents systèmes de coordonnées

cartésiennes

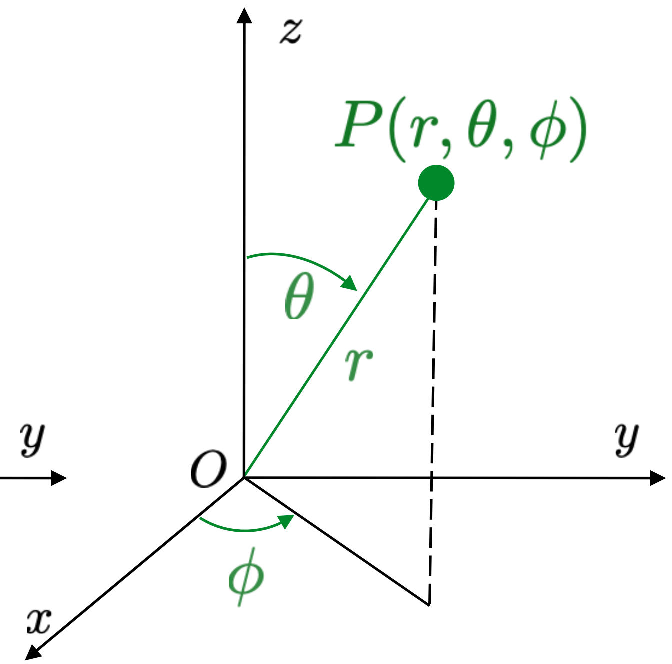


cylindriques



$\rho \geq 0$
$\phi \in [0, 2\pi[$
z

sphériques

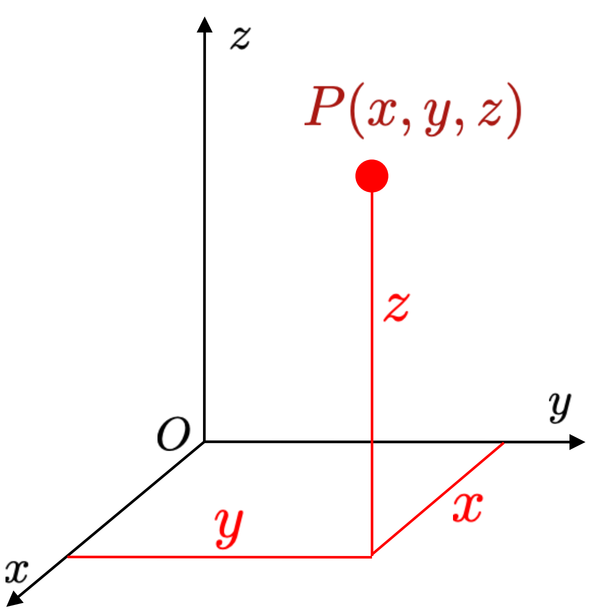


$r \geq 0$
$\theta \in [0, \pi]$
$\phi \in [0, 2\pi[$

Autre ex.: - Coordonnées polaires (ρ, ϕ) quand z est constante
- coordonnées géographiques sur le globe terrestre (latitude, longitude, altitude)

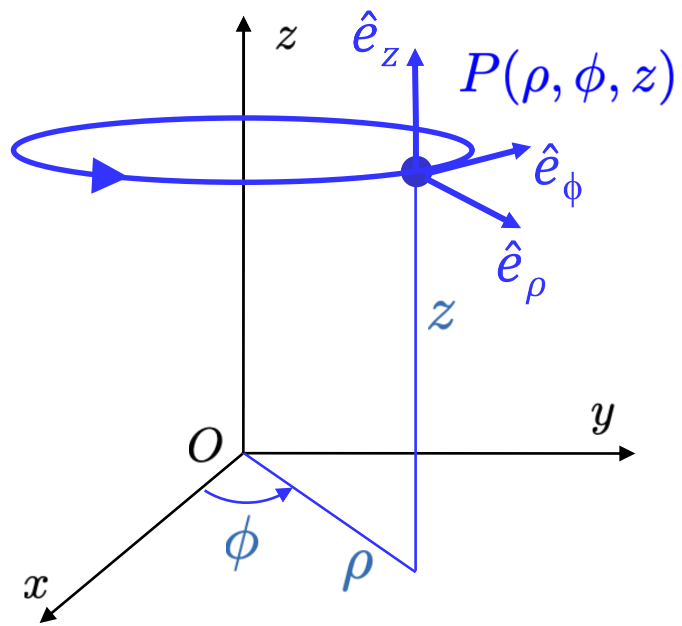
2.3 Bases (Repères) associés aux systèmes de coordonnées

cartésiennes



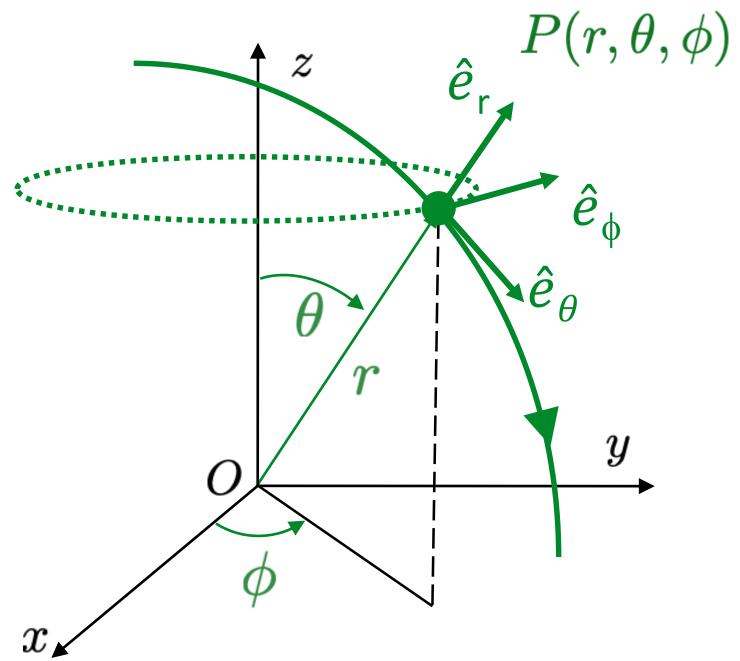
$O\hat{x}\,\hat{y}\,\hat{z}$

cylindriques



$O\hat{e}_\rho\,\hat{e}_\phi\,\hat{e}_z$

sphériques



$O\hat{e}_r\,\hat{e}_\theta\,\hat{e}_\phi$